Das Galton-Brett – Möglichkeiten in der Grundschule

ANNA BIRICH, GIESSEN & MICHELLE PAYER, DARMSTADT

Zusammenfassung: *Im Beitrag wird eine Studie zum Galton-Brett in der Grundschule vorgestellt, welche sowohl im Anfangsunterricht als auch in Klasse 4 durchgeführt wurde. Im Zentrum der Ausführungen stehen der Aufbau der Studie, Aufgabenstellungen für Schülerinnen und Schüler und ausgewählte Untersuchungsergebnisse. Daraufhin sollen Grenzen und Möglichkeiten des Galton-Brettes aufgezeigt werden, welches bislang keinen festen Bestandteil für die Grundschule darstellt.*

1 Einleitung

Um Heranwachsenden einen langfristigen Aufbau des Zufallsverständnisses sowie der Kalkulierbarkeit des zufälligen Ereignisses zu ermöglichen, sollten sie „von Klasse 1 an die Chance haben, Kenntnisse über den Zufall zu erwerben“ (Hasemann, Mirwald et al. 2008, S. 188). Stochastische Inhalte sind seit dem Beschluss der Bildungsstandards im Jahre 2004 bereits ab der Jahrgangsstufe 1 in den Unterricht zu integrieren. Ein Fokus liegt dabei auf dem Vergleichen von Wahrscheinlichkeiten von Ereignissen in Zufallsexperimenten, indem die wahrscheinlichkeitstheoretischen Grundbegriffe sicher, *unmöglich* und *wahrscheinlich* zur Beschreibung genutzt werden (vgl. KMK 2005, S. 11).

Um diesen Anforderungen gerecht zu werden, sind im Grundschulunterricht vordergründig die Zufallsgeneratoren Würfel, Urne und das Glücksrad vorzufinden. Empirisch konnte dabei belegt werden, dass viele Schülerinnen und Schüler bereits in ihrer alltäglichen Lebenswelt Erfahrungen mit diesen Zufallsgeneratoren sammeln und diese in den unterrichtlichen Kontext miteinfließen. Im Rahmen einer wissenschaftlichen Hausarbeit zu unterschiedlich gestalteten Würfeln (vgl. Birich 2017) konnte gezeigt werden, dass diese Vorerfahrungen oftmals zu Fehlvorstellungen führen. Im Rahmen dieser Untersuchung wurde den Schülerinnen und Schülern des Anfangsunterrichts ein herkömmlicher Spielwürfel präsentiert. Das Wahrscheinlichkeitsverständnis in Bezug auf den Spielwürfel zeichnete sich bei den Versuchsteilnehmern durch subjektive Erfahrungen aus Spielsituationen aus. Zu denken sei hier beispielsweise an das Spiel „Mensch-ärgere-dich-nicht“, durch welche die Würfelzahl 6 eine besondere Bedeutung erhält und von den Versuchsteilnehmern als schwieriger zu würfeln eingeschätzt wurde. Ein Würfel, welcher statt der Augenzahlen von 1 bis 6 mit verschiedenen Tiermotiven versehen wurde, zeigte ebenfalls ein vorhandenes Wahrscheinlichkeitsverständnis aus persönlichen Überzeugungen und Präferenzen. Eines der abgebildeten Tiermotive war das *Schwein*. Dieses sei im Gegensatz zu anderen Tiermotiven leichter zu würfeln, da es durch die Assoziation zum „Glücksschwein“ besonders viel Glück bringe. Auch in der Literatur wird mehrfach darauf hingewiesen, dass aus alltäglichen Erfahrungen ein subjektiver Wahrscheinlichkeitsbegriff entsteht, der mit Fehlvorstellungen einhergeht (vgl. Lorenz 2014, S. 159 ff.). Das übergeordnete Ziel im Zuge der Behandlung von Wahrscheinlichkeit im Unterricht besteht darin, die subjektiven, intuitiven und oftmals mit Fehlvorstellungen behafteten Auffassungen der Kinder über Eintrittswahrscheinlichkeiten von Ereignissen, zu objektiven und quantitativen Aussagen zu führen (vgl. Schipper 2009, S. 284). Auf diese Weise soll der Aufbau einer fachlich adäquaten Grundvorstellung erfolgen.

Aufgrund dessen wurde im Rahmen einer weiteren wissenschaftlichen Hausarbeit der Frage nachgegangen, welchen Stellenwert ein den Schülerinnen und Schülern unbekannteres Zufallsexperiment zur Heranführung und Vertiefung des Wahrscheinlichkeitsverständnisses im Grundschulunterricht einnehmen kann (vgl. Payer 2017).

Ein allgemein – jedoch nicht im Primarbereich – bekanntes Zufallsexperiment ist das Galton-Brett. Als erprobtes Mittel zur Erzeugung und Visualisierung der Binomialverteilung wird dieses häufig in der Oberstufe oder in Lehrbüchern verwendet (vgl. Eichler & Vogel 2011, S. 143 ff.). Im Primarbereich hingegen ist der Einsatz des Galton-Brettes für den Aufbau einer fachlich adäquaten Grundvorstellung im Bereich der Wahrscheinlichkeit weitgehend unerforscht und lediglich durch vereinzelte Studien untersucht worden (vgl. Selter 1985).

Dadurch entstanden folgende Forschungsfragen:

- Kann die fachliche Thematik adressatengerecht aufgearbeitet werden und erkennen die Lernenden erste wahrscheinlichkeitstheoretische Gesetzmäßigkeiten?
- Besteht die Möglichkeit, das Galton-Brett bereits in einer 1. Klasse zu thematisieren? Können dadurch bereits im Anfangsunterricht anhand eines den Schülerinnen und Schülern nicht bekannten Zufallsexperimentes erste schulische Erfahrungen im Bereich der Wahrscheinlichkeit gesammelt werden?
- Welche Möglichkeiten bringt die Thematisierung des Galton-Brettes in der Grundschule im Gegensatz zum Würfel mit sich?

2 Das Galton-Brett

In der Studie wurden Galton-Bretter betrachtet, die folgendermaßen aufgebaut sind: Die Anzahl der Fächer, in welchen sich die Kugeln sammeln, ist an die Anzahl der Reihen gebunden, wodurch eine feste Beziehung zwischen den Fächern und den Reihen entsteht (s. Abb. 1). Die Kugel, welche das Galton-Brett herunterrollt, hat an jeder Stelle des Hindernisses entweder die Möglichkeit nach rechts oder links abgelenkt zu werden (vgl. Kuthan 2016, S. 42). Beim Durchlaufen der Kugel durch das Galton-Brett ist jedes aufeinanderfolgende Ereignis unabhängig von einem vorangegangen Ereignis. Somit werden jegliche Abweichungen, wie zum Beispiel der Einwurf der Kugel mit einem Drall nach rechts oder links, ausgeblendet, da damit eine Aufhebung der stochastischen Unabhängigkeit der Teilvorgänge einhergehen würde (vgl. Eichler & Vogel 2011, S. 144). Dabei beträgt die Wahrscheinlichkeit, dass die Kugel nach rechts abgelenkt wird p und die, dass sie nach links abgelenkt wird $1 - p$.

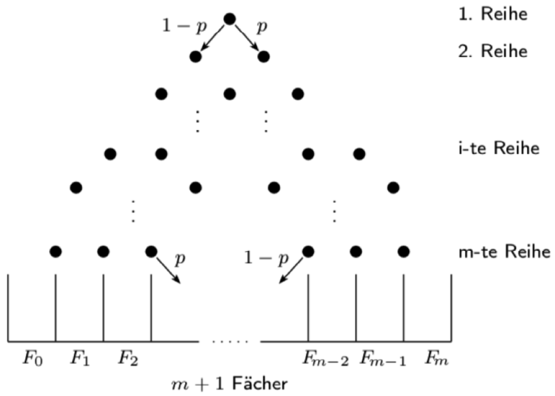

Abb. 1: Notation des Galton-Brettes [eigene Darstellung] (nach Kunert et al. 2001, S. 160)

Verallgemeinert betrachtet werden n Kugeln hineingeworfen, welche in $m + 1$ Fächern landen können. Dabei steht m für die Anzahl der Reihen des Galton-Brettes. Die Fächer werden durch das Kürzel F_k beschrieben. Dabei reicht k von 0, …, bis m und gibt an, wie oft die Kugel nach rechts abgelenkt wird. Ist $k = 0$, so wurde die Kugel immer nach links und somit kein Mal nach rechts abgelenkt (vgl. Kunert et al. 2001, S. 159 f.).

In dieser Untersuchung wurde das *Standard-Galton-Brett* betrachtet, bei dem die Wahrscheinlichkeit 50 % beträgt ($p = 0{,}5$). Es gilt die Binomialverteilung $B(m; p; k)$ (vgl. ebd., S. 161):

$$B(m;\ p;\ k) = \binom{m}{k} p^k (1 - p)^{m-k}$$

mit $p = 0{,}5$ folgt:

$$B(m;\ 0{,}5;\ k) = \binom{m}{k} (0{,}5)^m$$

Die Kugel kann auf ihrem Weg demnach exakt k mal nach rechts abgelenkt werden, um in das Fach k zu gelangen. Dies bedeutet, dass es für jedes Fach genau $\binom{m}{k}$ verschiedene Wege gibt, welche durch das Galton-Brett führen. Multipliziert man die Anzahl der möglichen Wege in ein Fach mit der Wahrscheinlichkeit für einen spezifisch ausgewählten Weg durch das Galton-Brett $p_{spez.} = 0{,}5^m$, so erhält man die Wahrscheinlichkeit für das Eintreffen der Kugel in das Fach k. Dabei ist die Wahrscheinlichkeit $p_{spez.}$ lediglich von der Anzahl der Reihen m abhängig.

Auch heute noch dient das Galton-Brett als „mechanisches Modell für Serien von verketteten Bernoulli-Versuchen“ (Kuthan 2016, S. 40). Dadurch wird ein anschaulicher Zugang „zur Binomialverteilung und deren Approximation durch die Gauß- oder Normalverteilung“ (ebd., S. 42) geschaffen.

3 Aufbau der Studie

3.1 Gesamtüberblick

Es wurde eine empirische Studie mit 26 Kindern der 1. Klasse und 17 Kindern der 4. Klasse durchgeführt. Das Galton-Brett, mit welchem sich die Versuchsteilnehmer der 1. Klasse beschäftigten, umfasst $m = 3$ Reihen (s. Abb. 2) und jenes der 4. Klasse $m = 5$ Reihen (s. Abb. 3).

Die Arbeitsblätter, welche die Kinder bearbeiteten und das im Folgenden vorgestellte handlungsorientierte Galton-Brett wurden adressatengerecht angepasst, um den jeweiligen entwicklungsbedingten Unterschieden Rechnung zu tragen. Vor Versuchsbeginn wurden die Teilnehmer mit dem Galton-Brett vertraut gemacht. Ein Galton-Brett mit $m = 3$ Reihen wurde an die Tafel der beiden Jahrgangsstufen gezeichnet, um daran die Funktionsweise zu erläutern:

> „Hier an der Tafel könnt ihr ein Galton-Brett sehen. Das Brett hat oben ein Loch, in welches Kugeln eingeworfen werden. Die Kugel trifft auf dem Weg nach unten auf viele Hindernisse. An diesen Hindernissen hat die Kugel immer die Möglichkeit nach rechts oder nach links abzubiegen.“ (Payer 2017, S. 51)

Zudem wurde ein möglicher Weg in eines der Fächer gemeinsam mit den Schülerinnen und Schülern erarbeitet.

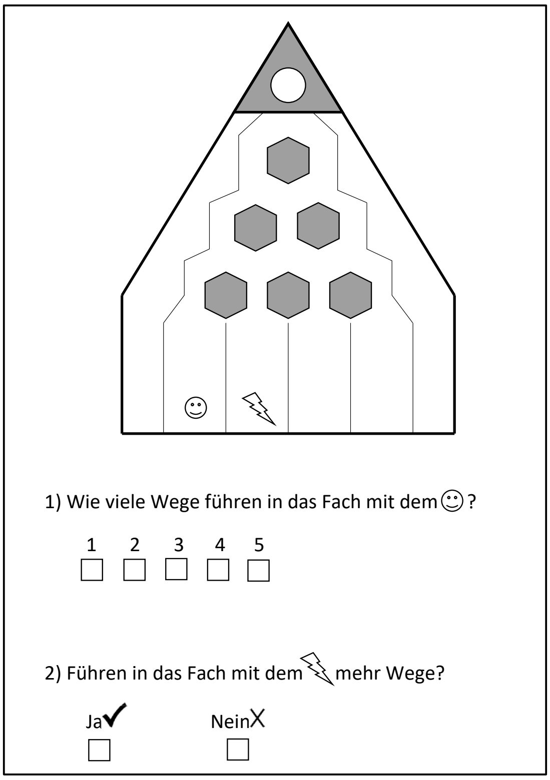

Abb. 2: Arbeitsblatt Jahrgangsstufe 1

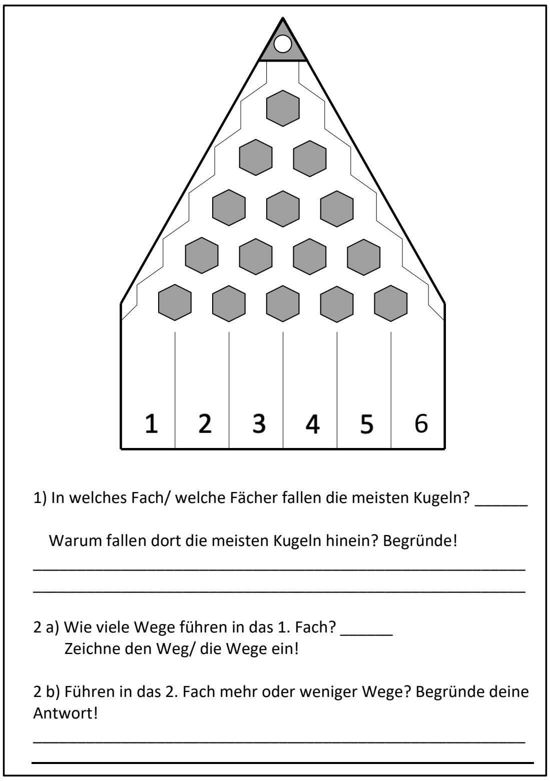

Abb. 3: Arbeitsblatt Jahrgangsstufe 4

Die Durchführung der Studie gliederte sich in zwei verschiedene Arbeitsphasen, die zunächst die ikonische sowie die symbolische Ebene nach Bruner (1971) umfassten und im Anschluss daran einen enaktiven und somit handlungsorientierten Zugang boten. Auf diese Weise sollte festgestellt werden, ob für Schülerinnen und Schülern eine theoretische Herangehensweise in Form der Bearbeitung eines Arbeitsblattes oder die handlungsorientierte Auseinandersetzung in Form des entdeckenden Lernens gewinnbringender ist.

3.2 Arbeitsphase I: Verständnisüberprüfung nach einer kurzen Einführung des Galton-Brettes

In Arbeitsphase I sollten alle Schülerinnen und Schüler ein Arbeitsblatt in Einzelarbeit ausfüllen. Ziel war es zu überprüfen, ob der Aufbau des Galton-Brettes verstanden wurde und ob die Versuchspersonen bereits erste wahrscheinlichkeitstheoretische Entdeckungen machen konnten. Die Schülerinnen und Schüler der 1. Klasse waren dabei in besonderem Maße auf die Instruktionen der Lehrperson angewiesen, da diese zum Untersuchungszeitpunkt nur über geringe Lese- und Schreibkompetenzen verfügten.

Die Lernenden der *Klassenstufe 1* sollten in der ersten Aufgabe entscheiden, wie viele Wege in das Fach links außen führen. Dieses wurde mit einem *Smiley* markiert. Die Kinder sollten weiterhin eine Aussage darüber treffen, ob in das nebenliegende Fach mit dem *Blitz* mehr Wege führen als in jenes mit dem *Smiley*. Es sollte überprüft werden, ob die Lernenden bereits in der 1. Klasse verstehen, welche möglichen Wege die Kugel durchlaufen kann.

Auf dem Arbeitsblatt der *Klassenstufe 4* (s. Abb. 3) sollten die Kinder in Aufgabe 1 herausfinden, in welches Fach bzw. in welche Fächer die meisten Wege führen. Die meisten Wege führen in die beiden mittleren Fächer. Die folgenden Aufgaben 2a und 2b sind vergleichbar zu den Aufgaben des Arbeitsblattes der 1. Klasse (s. Abb. 2). Auch hier sollten die Versuchsteilnehmer herausfinden, dass in die äußersten Fächer nur ein möglicher Weg besteht und in die nebenliegenden Fächer mehr Wege führen.

3.3 Arbeitsphase II: Das handlungsorientierte Galton-Brett

Teil 1

In einem Klassenraum wurde das Galton-Brett mit Kreppband und vorbereiteten sechseckigen Hindernissen auf den Boden geklebt. Abbildung 4 zeigt das handlungsorientierte Galton-Brett, welches für die Jahrgangsstufe 4 verwendet wurde. Jenes der 1. Klasse ist vergleichbar mit dem abgebildeten Galton-Brett auf dem Arbeitsblatt (s. Abb. 2).

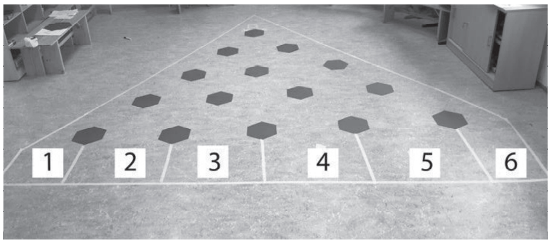

Abb. 4: Aufbau des handlungsorientierten Galton-Brettes (Klasse 4)

Für die Ablenkung der Kugel an jedem Hindernis (zu je 50 % nach rechts bzw. links) in dem Galton-Brett-Modell, muss im Rahmen des handlungsorientierten Galton-Brettes ein Ersatz gefunden werden: Als greifbares Zufallsexperiment mit derselben Wahrscheinlichkeit für das Eintreten der Ereignisse wurde daher der Münzwurf ausgewählt. Auf diese Weise konnten die Lernenden die Rolle der Kugel nachempfinden.

Der Münzwurf stellt somit das Entscheidungskriterium dar, ob die Schülerinnen und Schüler am jeweiligen Hindernis, an dem sie sich befanden, nach rechts (es fällt Zahl) oder nach links (es fällt Kopf) weitergehen mussten. Da bei einem Münzwurf die stochastische Unabhängigkeit gilt, ist das Eintreten von Zahl und Kopf voneinander unabhängig.

Die Lernenden wurden in Kleingruppen von 3–5 Kindern in den Nebenraum geführt und bekamen folgenden Arbeitsauftrag:

> „Stellt euch an den markierten Startpunkt auf. Ihr seid nun selbst eine Kugel und durchlauft das Galton-Brett bis ihr unten in einem Fach ankommt. Jetzt nehmt ihr eine Münze und werft diese in die Luft. […] Zeigt die Münze ‚Kopf' an, dann geht ihr nach links bis zum nächsten Hindernis bzw. Sechseck. Zeigt die Münze ‚Zahl', dann geht ihr nach rechts bis zum nächsten Hindernis. Ihr werft die Münze solange erneut, bis ihr unten in einem Fach ankommt.“ (Payer 2017, S. 53)

Bevor jedes Kind das Galton-Brett durchlaufen ist, sollte es eine mündliche Voraussage treffen, in welches Fach es glaubt zu kommen. Dabei sollte herausgestellt werden, ob die Versuchsteilnehmer das Zufallsexperiment als solches identifizieren und sie somit nicht sicher voraussagen können, in welches Fach sie gelangen.

Teil 2

Im letzten Teil der Studie wurde zunächst die gesamte 1. Klasse und im Anschluss die gesamte 4. Klasse am handlungsorientierten Galton-Brett versammelt. Jeder Teilnehmer durchlief erneut das Galton-Brett und markierte sein erreichtes Zielfach mit einem Bierdeckel. Kamen weitere Kinder in dasselbe Fach, so wurden die Bierdeckel übereinander gelegt, sodass eine schnelle Erfassung der Bierdeckelverteilung möglich wurde. Nun sollten die Schülerinnen und Schüler die Verteilung der Bierdeckel genau betrachten und Besonderheiten herausarbeiten. Außerdem sollten die Fächer mit den meisten und wenigsten Bierdeckeln benannt und gemeinsam Erklärungen dafür herausgearbeitet werden. Bei den Schülerinnen und Schülern der 4. Klasse sollte zudem der Fokus darauf gelegt werden, ob sie die wahrscheinlichkeitstheoretischen Grundbegriffe sicher, unmöglich und wahrscheinlich zur Beschreibung heranziehen.

4 Ergebnisse

Arbeitsphase I: Theoretische Auseinandersetzung

Klasse 1: Aufgabe 1

Rechnerisch kann mithilfe des Binomialkoeffizienten gezeigt werden, wie viele Wege in ein gesuchtes Fach führen. In das Fach mit dem Smiley führt demnach genau ein Weg: $\binom{m}{k} = \binom{3}{0} = 1$.

Es gelang 23 von 26 Versuchsteilnehmern der 1. Klasse durch Ausprobieren und Einzeichnen der verschiedenen Wege in das Galton-Brett zu identifizieren, dass nur ein Weg in das gefragte Fach führt.

Klasse 1: Aufgabe 2

23 der 26 Kinder der 1. Klasse erkannten, dass es in das Fach mit dem Blitz mehr mögliche Wege gibt als in jenes mit dem Smiley. 13 von ihnen zeichneten sogar alle drei möglichen Wege $\left(\binom{3}{1} = 3\right)$ ein und weitere 9 Lernende schafften es zwei mögliche Wege zu finden. Da die Einzeichnung der Lösungen nicht explizit gefordert wurde, zeigte sich deutlich, dass den Kindern im mathematischen Anfangsunterricht die gedankliche Abstraktion schwer fällt und sie deshalb eigenständig die Wege einzeichneten, um die Lösung zu ermitteln.

Die Lösungen der beiden Aufgaben sowie die eigenständig angefertigten Einzeichnungen der Wege in die jeweiligen Fächer lassen darauf schließen, dass die Schülerinnen und Schüler der 1. Klasse den Ablauf des Galton-Brettes sowie die möglichen Wege, die eine Kugel gehen kann, bereits nach einer kurzen Instruktion verstanden haben. Allerdings wurden keine wahrscheinlichkeitstheoretischen Überlegungen zur Begründung der jeweiligen Lösungen angeführt.

Klasse 4: Aufgabe 1

2 der 17 Lernenden gaben die richtige Antwort: In Fach 3 und 4 führen die meisten Wege $\left(\binom{5}{2} = 10 \text{ und } \binom{5}{3} = 10\right)$. Weitere 4 Kinder ermittelten eines von den beiden Fächern. Diese Lernenden argumentierten damit, dass in die Fächer 3 und 4 mehr Wege führen als in die übrigen Fächer.

In der theoretischen Arbeitsphase bereitete diese Aufgabe den meisten Schülerinnen und Schülern große Schwierigkeiten, was aus den folgenden Begründungsmustern dieser festgestellt werden konnte:

- Die meisten Kugeln fallen in Fach 1 und 6, weil die Kugeln nach außen fallen wollen.
- Es besteht eine Gleichwahrscheinlichkeit von allen Fächern.
- Die Kugel will gerade nach unten fallen, weshalb die meisten Kugeln in den mittleren Fächern landen.
- Wo die Kugel landet, ist abhängig davon, in welche Richtung die Kugel hineingeworfen wird und wie viel Schwung die Kugel hat.

Diese Argumentationen zeigen, dass unterschiedliche Fehlvorstellungen vorliegen und für die theoretischen Begründungen beispielsweise physikalische Aspekte herangezogen werden. In der zweiten Arbeitsphase sollte daher der Frage nachgegangen werden, ob das handlungsorientierte Galton-Brett zu wahrscheinlichkeitstheoretischen Überlegungen beitragen kann und vorhandene Fehlvorstellungen beseitigt werden können.

Klasse 4: Aufgabe 2a

In Fach 1 führt nur ein möglicher Weg: $\binom{m}{k} = \binom{5}{0} = 1$.

Es lösten 13 der 17 Kinder diese Aufgabe richtig und 10 von ihnen gaben zusätzlich eine richtige Zeichnung ab. Bei den Kindern, die mehr Wege für das Fach 1 gefunden haben, zeigten sich folgende Fehlvorstellungen, die anhand ihrer Zeichnungen ausgemacht werden konnten:

- Es gibt nicht nur einen Weg in Fach 1, da die Kugel an der unteren Ecke des Sechsecks abprallen kann und somit ein Drall die Kugel, auch nach einer Ablenkung nach rechts, erneut zurück auf den ganz linken Pfad führt (s. Abb. 5).

- Die Kugel wird nach rechts abgelenkt und kann am nächsten Sechseck schräg nach oben laufen, um wieder auf den äußersten linken Pfad zurückzukehren (s. Abb. 6).

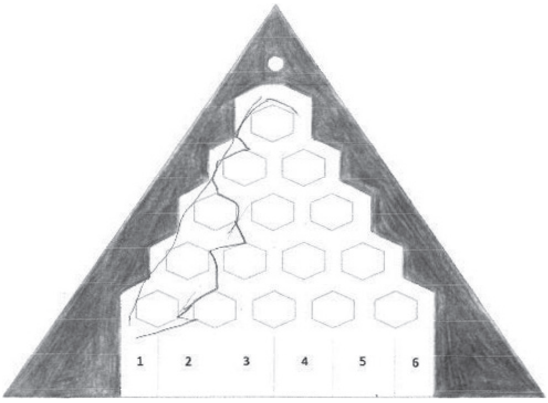

Abb. 5: Durch Abprallen führen zwei Wege in Fach 1 (Schülerbeispiel)

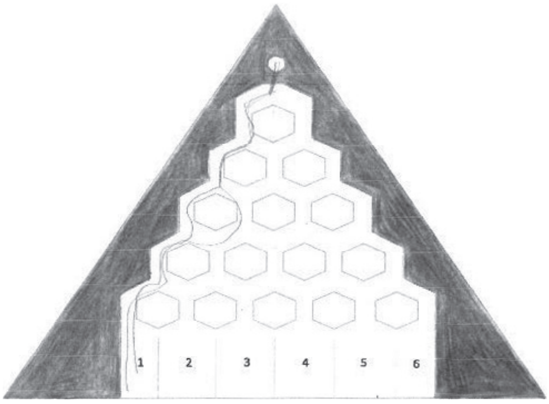

Abb. 6: Kugel läuft wieder nach oben (Schülerbeispiel)

Klasse 4: Aufgabe 2b

Insgesamt 12 von 17 Kindern stellten heraus, dass in Fach 2 mehr Wege führen als in Fach 1. Lediglich 3 Lernende zeichneten alle 5 möglichen Wege ein $\left(\binom{5}{1} = 5\right)$. Viele Schülerinnen und Schüler unterbrachen das Einzeichnen der Wege, nachdem sie zwei Wege fanden, da dies bereits ein Weg mehr war als jener, welcher in das nebenliegende Fach 1 führt.

Große Schwierigkeiten zeigten sich bezüglich der Argumentationen für ihre Entdeckung, dass in Fach 2 mehr Wege führen als in Fach 1. Kein Versuchsteilnehmer war in der Lage, damit zu argumentieren, dass die Wahrscheinlichkeit für Fach 2 größer ist, da die Kugel nun einmal nach rechts abgelenkt werden darf. Lediglich ein Schüler konnte allgemein herausstellen, dass die Wahrscheinlichkeit größer sei, ohne explizit den Grund hierfür zu nennen.

Arbeitsphase II: Handlungsorientierte Durchführung

Im Allgemeinen konnte in dieser Arbeitsphase anhand des handlungsorientierten Galton-Brettes festgestellt werden, dass dessen Funktionsweise sowohl von den Versuchsteilnehmern der 1. Klasse als auch der 4. Klasse verstanden wurde. Die zuvor benannten Fehlvorstellungen wurden durch die handlungsorientierte Auseinandersetzung beseitigt. Auch den Münzwurf als Entscheidungskriterium an jedem Hindernis konnten die Lernenden problemlos anwenden. Der Großteil erkannte zudem, dass eine Gleichwahrscheinlichkeit des Eintretens von Kopf und Zahl besteht.

Klasse 1

Der Einsatz des handlungsorientierten Galton-Brettes eröffnete für die Kinder der 1. Klasse die Möglichkeit zu erkennen, dass keine sichere Voraussage darüber getroffen werden kann, in welches Fach das jeweilige Kind gelangt. Diese Erkenntnis konnten viele der Schülerinnen und Schüler explizit formulieren, wobei auch der Münzwurf als zufälliges Ereignis identifiziert wurde.

Vielen Versuchsteilnehmern gelang es zudem herauszustellen, welche Münzseiten und wie oft diese Münzseiten geworfen werden müssen, um in die beiden äußeren Fächer zu gelangen. Im Rahmen dessen beschrieb ein Schüler das äußerste Fach mit dem *Smiley* als *„Hauptpreis"*, um die Schwierigkeit darzustellen, dieses Fach zu erreichen. Gleichzeitig erkannten die meisten Schülerinnen und Schüler, dass sie für das Erreichen der beiden mittleren Fächer nicht ausschließlich Kopf oder Zahl in einem gesamten Durchlauf werfen müssen, sondern sich die Eintrittsereignisse abwechseln können.

Das Durchlaufen des Galton-Brettes mit der gesamten Klasse verdeutlichte den Lernenden, dass die beiden mittleren Fächer des Galton-Brettes häufiger erreicht werden.

Klasse 4

Auch die Schülerinnen und Schüler der 4. Klasse äußerten, dass vor der Versuchsdurchführung keine sichere Aussage darüber getroffen werden kann, in welches Fach sie gelangen würden. Zusätzlich wurden wahrscheinlichkeitstheoretische Begriffe wie *wahrscheinlich* und *unwahrscheinlich* genutzt, um die Wahrscheinlichkeiten für das Gelangen in die verschiedenen Fächer zu beschreiben. In diesem Zusammenhang stellten die Versuchsteilnehmer heraus, dass das Gelangen in die äußeren Fächer unwahrscheinlicher als die Ankunft in den anderen Fächern ist. Interessant ist hierbei die Beobachtung, dass ein Schüler vor Versuchsdurchführung den Wunsch äußerte, in das äußerste Fach 6 zu kommen, ihm jedoch gleichzeitig bewusst war, dass das Eintreten dieses Ereignisses unwahrscheinlich ist. Dieser Versuchsteilnehmer konnte zuvor seine 16 Mitschüler beim Durchlaufen des Galton-Brettes beobachten, wobei sich in den mittleren Fächern 3 und 4 die meisten Bierdeckel befanden. Im Gegensatz dazu befand sich in Fach 6 lediglich ein Bierdeckel. Dadurch konnte er problemlos seinen subjektiven Wunsch in Fach 6 zu gelangen in eine objektive Betrachtung der Wahrscheinlichkeit für das Eintreten dieses Ereignisses überführen und die Eintrittswahrscheinlichkeit für Fach 6 mit dem Begriff „unwahrscheinlicher" beschreiben.

Umgekehrt konnten die Kinder ebenso herausstellen, dass die meisten Personen in die beiden mittleren Fächer gelangen, da in diese die meisten Wege führen. Hierbei zeigten sich dennoch Schwierigkeiten der Versuchsteilnehmer hinsichtlich der Argumentation ihrer Beobachtungen, da der adäquate Umgang mit den wahrscheinlichkeitstheoretischen Fachbegriffen nicht gegeben war.

Außerdem erklärten einige Lernende, dass alle Fächer erreicht werden können, auch wenn am Ende in Fach 1 kein Kind endete. Sie schlussfolgerten, dass dafür ein Lernender an jedem Hindernis die Zahl hätte werfen müssen. Dies sei unwahrscheinlich, jedoch nicht unmöglich. Die Versuchsteilnehmer ordneten demnach die Eintrittswahrscheinlichkeiten der jeweiligen Fächer auf der Wahrscheinlichkeitsskala ein und verknüpften somit ihr Vorwissen mit einem für sie neuem Zufallsexperiment.

5 Zusammenfassung und Interpretation der Ergebnisse

Die Untersuchungsergebnisse zeigen, dass der Einsatz des Galton-Brettes in der Grundschule für eine Heranführung an die Thematik der Wahrscheinlichkeit durchaus denkbar ist. Durch eine adressatengerechte Gestaltung des Galton-Brettes für die verschiedenen Jahrgangsstufen konnten sowohl die Kinder der 1. als auch die der 4. Klasse wahrscheinlichkeitstheoretische Überlegungen anführen, auch wenn den Lernenden der 1. Klasse zur Umschreibung das Fachvokabular fehlte. Jedoch ergibt sich die Möglichkeit, anhand des Galton-Brettes Fachtermini, wie beispielsweise *sicher*, *wahrscheinlich* sowie *unwahrscheinlich*, im Anfangsunterricht einzuführen. Die Einordnung des Eintretens der Fächer auf der Wahrscheinlichkeitsskala gelang insbesondere durch den handlungsorientierten Zugang, welcher somit deutlich gewinnbringender für eine Behandlung in der Grundschule ist.

In der theoretischen Auseinandersetzung mit dem Galton-Brett in Arbeitsphase I zeigte sich, dass nur wenige Versuchsteilnehmer wahrscheinlichkeitstheoretische Argumentationen anführten. Damit kann davon ausgegangen werden, dass das Galton-Brett zunächst von der Mehrheit nicht als Zufallsexperiment identifiziert wurde, da die theoretische Herangehensweise zum Einstieg in das Galton-Brett zu abstrakt erscheint. Die Wege können auch durch Ausprobieren und damit ohne ein Abwägen anhand von wahrscheinlichkeitstheoretischen Überlegungen an jedem Hindernis herausgefunden werden. Im Gegensatz dazu offenbarte sich der Zufallscharakter des Galton-Brettes für die Schülerinnen und Schüler in der Arbeitsphase II in Verbindung mit dem Münzwurf als Entscheidungskriterium. Durch die handlungsorientierte Auseinandersetzung mit dem Galton-Brett konnte die Funktionsweise dessen deutlicher thematisiert und anfängliche Fehlvorstellungen, wie beispielsweise das Zurückkehren auf den äußersten linken Pfad nach einer bereits durchgeführten Ablenkung nach rechts, beseitigt werden. Zudem konnten die Kinder in der aktiven Auseinandersetzung problemlos herausstellen, dass der Ausgang des Durchlaufens des Galton-Brettes nicht vorhersehbar ist. Auch die Wahrscheinlichkeiten für die Verteilung der Kinder in die verschiedenen Fächer konnten von den Versuchsteilnehmern erfasst und mithilfe der wahrscheinlichkeitstheoretischen Begriffe beschrieben werden. Die handlungsorientierte Durchführung verhalf den Schülerinnen und Schülern im Rahmen eines forschenden und entdeckenden Unterrichts zu einem besseren Wahrscheinlichkeitsverständnis.

Es zeigt sich, dass Schülerinnen und Schüler die komplexe Thematik, trotz fehlender Vorerfahrungen oder gar fehlendem Vorwissen zum Galton-Brett sowie der Thematik der Wahrscheinlichkeit, erfassen konnten. Möglicherweise kann hier ein großer Vorteil des Galton-Brettes im Gegensatz zu herkömmlichen Zufallsgeneratoren wie dem Würfel gesehen werden: Die im Schulalltag übliche Herangehensweise zur Thematik der Wahrscheinlichkeit erfolgt mit Hilfe des Würfels. Wie bereits eingangs skizziert, führt die wiederholte Begegnung mit dem Würfel im Alltag dazu, dass sich einige Vorstellungen bereits gefestigt haben. Um jedoch einen fachadäquaten Wahrscheinlichkeitsbegriff aufbauen zu können, müssen zunächst teilweise vorhandene Fehlvorstellungen beseitigt werden.

Die Versuchsteilnehmer waren in der Lage, von persönlichen Erfahrungen zu abstrahieren. Anders als in der Untersuchung zu den unterschiedlich gestalteten Würfeln wurde das Einschätzen von Eintrittswahrscheinlichkeiten für das Galton-Brett nicht anhand von „Bauchentscheidungen“, von Zuschreibungen von Glück und Pech in Bezug auf die eigene Person oder auf Grundlage von persönlichen Präferenzen abhängig gemacht. Diese Entscheidungskriterien resultieren zumeist aus unterschiedlichen Erfahrungen aus dem Alltag, die für das Galton-Brett nicht gesammelt werden konnten. Dadurch könnte den Kindern ein unvorbelasteter Einstieg in die Thematik der Wahrscheinlichkeit ermöglicht werden.

Die Arbeit mit dem Galton-Brett eröffnet verschiedene Möglichkeiten, um zahlreiche Facetten der Wahrscheinlichkeitsthematik zu behandeln und im Unterricht zielführend zu integrieren. So können die Behandlung der Fachbegriffe *sicher*, *wahrscheinlich*, und *unwahrscheinlich*, die Verteilung der Kugeln bzw. Kinder in die jeweiligen Fächer sowie die Verkettung von Zufallsexperimenten in den Blickpunkt geraten. Die geringe Anzahl der Kinder einer Grundschulklasse führt zu einer geringen Stichprobe, was als Grenze des handlungsorientierten Galton-Brettes deklariert werden kann. Selbst wenn alle Schülerinnen und Schüler das Galton-Brett einmal durchlaufen haben, können die erhobenen Werte stark von der zu erwartenden Annäherung an die Normalverteilung abweichen. Demzufolge sollte ein großer Stichprobenumfang bei der praktischen Durchführung bedacht werden. Andererseits kann in einer solchen Situation *das Gesetz der großen Zahlen* didaktisch reduziert mit den Kindern thematisiert werden.

Des Weiteren zeigten sich häufig Schwierigkeiten bei der Kompetenz des Argumentierens. Um den in den Bildungsstandards geforderten Ansprüchen gerecht zu werden, wird eine frühe Auseinandersetzung mit der Thematik zur Notwendigkeit, um den Bedeutungshintergrund stochastischer Grundbegriffe offenzulegen und im Sinne des Spiralcurriculums im Laufe der Schuljahre immer wieder zu festigen. Im Austausch mit Mitschülern und durch handlungsorientierte Auseinandersetzungen mit Zufallsexperimenten wird die Kompetenz des Argumentierens geschult.

Zusammenfassend kann das Galton-Brett im Unterricht genutzt werden, um bereits vorhandenes Wissen zu vertiefen und unterschiedliche Aspekte der Wahrscheinlichkeitsthematik aufzugreifen. Andererseits kann das Galton-Brett als Einstieg in die Thematik fungieren und die wahrscheinlichkeitstheoretischen Aspekte nacheinander anhand des Galton-Brettes aufgeschlüsselt werden. Im Zuge dessen könnte das Galton-Brett die Schülerinnen und Schüler im Laufe der Grundschulzeit begleiten, um neue Inhalte aufzugreifen sowie die Argumentationskompetenz zu fördern und damit einen ständigen Begleiter in der Wahrscheinlichkeitsthematik darstellen.

Literatur

Birich, A. (2017): Wahrscheinlichkeit im Anfangsunterricht – Untersuchungen mit unterschiedlich gestalteten Würfeln. Gießen. Wissenschaftliche Hausarbeit im Rahmen der Ersten Staatsprüfung für das Lehramt an Grundschulen im Fach Mathematik.

Bruner, J. S.; Olver, R. R. et al. (1971): Studien zur kognitiven Entwicklung: eine kooperative Untersuchung am „Center for Cognitive Studies“ der Harvard Universität. (1. Aufl.). Stuttgart: Klett.

Eichler, A. & Vogel, M. (2011): Leitfaden Stochastik: Für Studierende und Ausübende des Lehramts. Wiesbaden: Vieweg + Teubner.

Hasemann, K.; Mirwald, E. et al. (2008): Daten, Häufigkeit, Wahrscheinlichkeit. In: Walter, G. et al. (Hrsg.): Bildungsstandards für die Grundschule: Mathematik konkret. Berlin: Cornelsen.

KMK (2005): Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich. Beschluss vom 15.10.2004. München: Luchterhand Verlag.

Kunert, J.; Montag, A. et al. (2001). The quincunx: history and mathematics. In: *Statistic Papers* (42), S. 143–169.

Kuthan, H. (2016): Das Zufallsprinzip: vom Ereignis zum Gesetz. (Zweite, überarbeitete Aufl.). Leipzig: Engelsdorfer Verlag.

Lorenz, J. H. (2014): Aspekte des Wahrscheinlichkeitsbegriffs in der kindlichen Entwicklung. In: Sproesser, U. et al. (Hrsg.): Daten, Zufall und der Rest der Welt. Didaktische Perspektiven zur anwendungsbezogenen Mathematik. Wiesbaden: Springer Spektrum. S. 159–167.

Payer, M. (2017): Das Galton-Brett in der Grundschule – Möglichkeiten und Grenzen. Gießen: Wissenschaftliche Hausarbeit im Rahmen der Ersten Staatsprüfung für das Lehramt an Grundschulen im Fach Mathematik.

Schipper, W. (2009): Handbuch für den Mathematikunterricht an Grundschulen. Braunschweig: Schroedel Westermann.

Selter, C. (1985): Warum wird die Mitte bevorzugt? Ein Unterrichtsversuch mit dem Galtonbrett im 4. Schuljahr. In: *Mathematik lehren*, S. 10–11.

Anschrift der Verfasser

Anna Birich
Mühläckerring 29
35396 Gießen
anna.birich@gmx.de

Michelle Payer
Karlstraße 29
64283 Darmstadt
mpayer@web.de